Übungen zum Thema „Funktionen“

Lösungsvorschlag

Kleine Aufgaben zum Einstieg:

1. Gib an, wie viele Nullstellen eine ganzrationale Funktion vierten Grades höchstens besitzt.

4

2. Gib die Nullstellen der Funktion $f(x) = x^2(x+2)(x-5)$ an.

$x_{1/2} = 0; x_3 = -2; x_4 = 5$

3. Begründe, dass der Graph der Funktion $f(x) = \frac{x^2}{x^2+6}$ achsensymmetrisch zur y-Achse ist.

$f(-x) = \frac{(-x)^2}{(-x)^2+6} = \frac{x^2}{x^2+6} = f(x)$ → achsensymmetrisch zur y-Achse

4. Begründe, dass der Graph der Funktion $f(x) = \frac{x^2}{x^2+6}$ nur durch den I. und II. Quadranten verläuft.

Für jeden Wert $x \in D_f$ ist $f(x) \geq 0$, also verläuft der zugehörige Graph nur durch den I. und II. Quadranten.

5. Ermittle $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+6}{3+2x^2}$.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+6}{3+2x^2} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1+\frac{6}{x^2}}{\frac{3}{x^2}+2} = \frac{1}{2}$

6. Gib an, für welchen Wert von m die Geraden g mit der Gleichung $2x - 3y = 6$ und h mit der Gleichung $y = mx + 3$ zueinander parallel sind.

Umformung der Gleichung der Funktion g: $2x - 3y = 6$

$$y = \frac{2}{3}x - 2$$

Die Geraden müssen die gleiche Steigung besitzen, also: $m = \frac{2}{3}$

7. Der Graph der Funktion $f(x) = 2^x$ wird parallel zu den Koordinatenachsen so verschoben, dass der Punkt $P(0|1)$, der auf dem Graphen der Funktion f liegt, auf den Punkt $Q(1|4)$ verschoben wird. Gib der Funktionsterm der verschobenen Funktion an.

$g(x) = 2^{x-1}+3$

8. Gib an, für welchen Parameter a gilt: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{ax^2+8x}{4x^2+1} = 2$

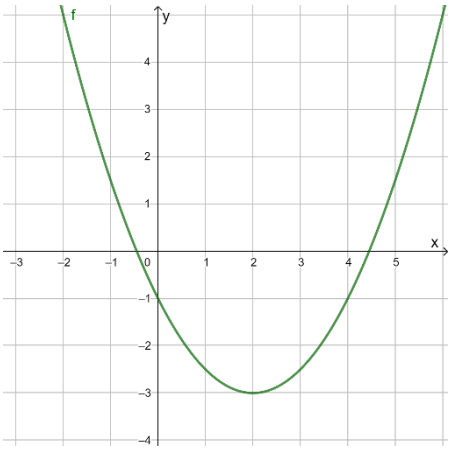
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{ax^2+8x}{4x^2+1} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{a+\frac{8}{x}}{4+\frac{1}{x^2}} = \frac{a}{4} = 2$, also $a = 8$

9. Der Graph der Funktion $f(x) = 2^{-x}$ wird an der x-Achse gespiegelt und dann in Richtung der y-Achse mit dem Faktor 3 gestreckt. Gib den Term der neuen Funktion an.

$g(x) = -3 \cdot 2^{-x}$

Weitere Aufgaben:

1. Quadratische Funktionen



Die Abbildung zeigt den Graphen einer Funktion f.
a) Gib an, welche der Funktionsgleichungen zu dem Graphen gehört und begründe deine Entscheidung.
I) $f(x) = (x-2)^2 - 3$

II) $f(x) = 0{,}5 \cdot (x-2)^2 - 3$

III) $f(x) = 0{,}5 \cdot (x-3)^2 - 2$

Die abgebildete Parabel hat den Scheitelpunkt $S(2|-3)$. Deshalb kann Gleichung III) ausgeschlossen werden. Der Schnittpunkt mit der y-Achse ist bei $(0|-1)$. Für Gleichung II) gilt: $f(0) = 0{,}5 \cdot (-2)^2 - 3 = -1$. Also gehört der Graph zu Gleichung II).

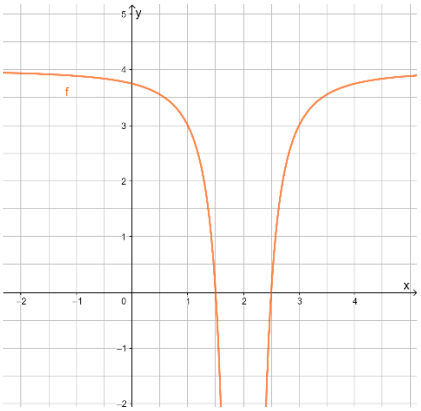
b) Nenne den Scheitelpunkt und den Schnittpunkt der Funktionen mit der y-Achse.

zu I) Scheitelpunkt $S(2|-3)$; Schnittpunkt mit der y-Achse $(0|1)$.

zu II) Scheitelpunkt $S(2|-3)$; Schnittpunkt mit der y-Achse $(0|-1)$.

zu III) Scheitelpunkt $S(3|-2)$; Schnittpunkt mit der y-Achse $(0|2{,}5)$.

2. Graph und Asymptote



Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion f mit der Asymptote $y = 4$. Überprüfe, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind, und begründe deine Antwort.

I) $g(x) = f(-x)$ hat den gleichen Schnittpunkt mit der y-Achse wie f.

II) $g(x) = -f(x) + 3$ hat zwei Nullstellen.

III) $g(x) = 0{,}5 \cdot f(x)$ hat die gleiche Asymptote wie f.

(1) Wahr, da g die Spiegelung von f an der y-Achse ist. Bei dieser Spiegelung bleiben die Punkte auf der y-Achse unverändert.

(2) Wahr, da g durch Spiegelung an der x-Achse und Verschiebung um 3 nach oben entsteht. Die Punkte (1|3) und (3|3) werden zu Nullstellen von g.

(3) Falsch, da g durch Streckung in y-Richtung mit dem Faktor 0,5 entsteht. Dabei wird auch die waagrechte Asymptote gestreckt. Die waagrechte Asymptote von g ist: $y = 0{,}5 \cdot 4 = 2$

3. Funktionen untersuchen

Es ist die Funktion $f(x) = -\frac{1}{3}x^4 + 6x^2 - 27$ gegeben.

a) Nenne die Symmetrie der Funktion und weise sie nach.

b) Beschreibe das Verhalten für $x \to \pm\infty$.

c) Berechne die Nullstellen und schreibe f mit Linearfaktoren auf.

a) $f(-x) = -\frac{1}{3}(-x)^4 + 6(-x)^2 - 27 = -\frac{1}{3}x^4 + 6x^2 - 27 = f(x)$

Die Funktion ist achsensymmetrisch zur y-Achse.

b) Die Funktion f ist eine ganzrationale Funktion. Vor der höchsten Potenz x^4 steht ein Minuszeichen, also verläuft der Graph der Funktion von links unten nach rechts unten.

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = -\infty$

c) $-\frac{1}{3}x^4 + 6x^2 - 27 = 0$

Substitution: $z = x^2$

$-\frac{1}{3}z^2 + 6z - 27 = 0 | \cdot (-3)$

$z^2 - 18z + 81 = 0$

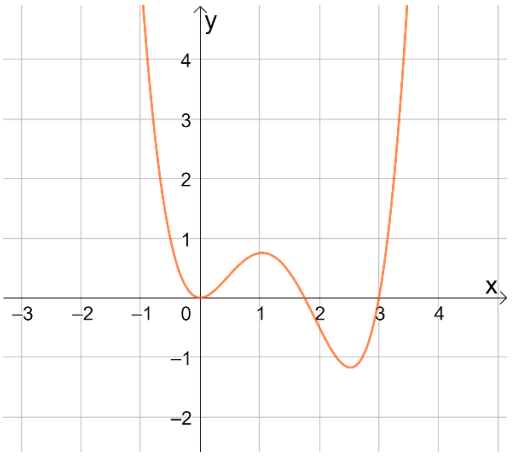
Lösen mit Mitternachtsformel/Binomischer Formel: $z_{1/2} = 9$

Rücksubstitution: $x^2 = 9$ (doppelt)

$x_1 = 3\ (doppelt); x_2 = -3\ (doppelt)$

$f(x) = -\frac{1}{3}(x-3)^2\,(x+3)^2$

4. Aussagen zu Graphen überprüfen



Die Abbildung zeigt den Graphen einer ganzrationalen Funktion 4. Grades. Untersuche, ob die Aussagen in dem dargestellten Intervall wahr oder falsch sind.

I) $f(2) > f(1)$

II) $f(x) = 2$ hat zwei Lösungen

III) $f(x) = x^2 \cdot g(x)$ mit einer Parabel g(x)

I) Falsch, da $f(2) < 0$ und $f(1) > 0$.

II) Wahr, da die Gerade $y = 2$ den Graphen der Funktion f zweimal schneidet.

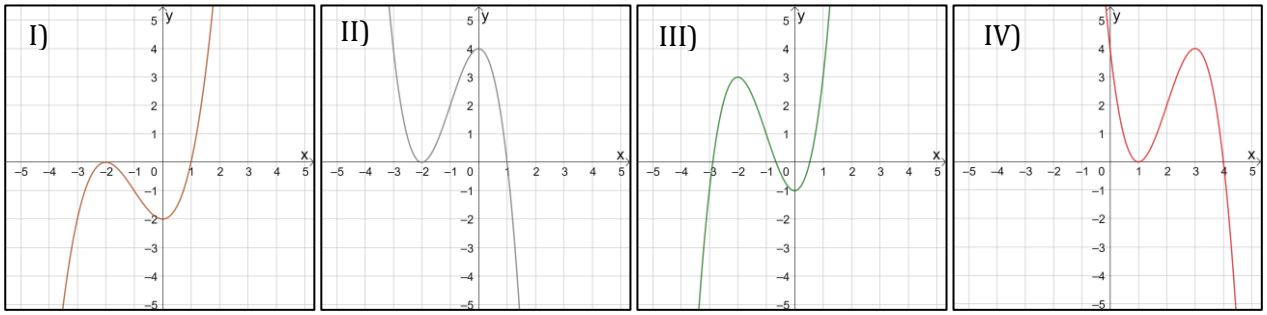
III) Wahr, da f die x-Achse im Ursprung berührt und daher bei $x = 0$ eine doppelte Nullstelle hat. Das bedeutet, dass bei der Zerlegung in Linearfaktoren der Faktor x^2 auftritt. Da f vierten Grades ist, ist dann g zweiten Grades.

5. Funktionen und Graphen zuordnen

a) Gib an, welcher Graph zu der Funktion $f(x) = -(x+2)^2 \cdot (x-1)$ gehört.

b) Bestimme die Zugehörigkeit der übrigen Graphen zu den Funktionen und nenne den jeweiligen Parameter:

$g(x) = f(x+a);\ \ h(x) = b \cdot f(x);\ \ k(x) = -f(x) + c$



a) $f(0) = -2^2 \cdot (-1) = 4$

Der Schnittpunkt mit der y-Achse ist bei $(0|4)$. Daher kommt nur II) in Frage.

b)

Der Graph I) entsteht aus f durch Spiegelung an der x-Achse und Streckung mit dem Faktor $\frac{1}{2}$.
$h(x) = -\frac{1}{2}f(x); b = -\frac{1}{2}$

Der Graph III) entsteht aus f durch Spiegelung an der x-Achse und Verschiebung um 3 in y-Richtung. $k(x) = -f(x) + 3; c = 3$

Der Graph IV) entsteht aus f durch Verschiebung um 3 in x-Richtung nach rechts.

$g(x) = f(x-3); a = 3$

6. Diskussion einer ganzrationalen Funktion

Gegeben ist die Funktion $f(x) = -4x^5 + 29x^3 - 25x$.

Bestimme $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)$ und untersuche die Funktion auf Symmetrie zur y-Achse bzw. zum Ursprung. Berechne die Nullstellen und den Schnittpunkt mit der y-Achse. Skizziere anschließend den groben Verlauf des Graphen mithilfe einer Vorzeichentabelle und beschreibe seinen Verlauf mit Worten.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty; \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty$

$f(-x) = -4(-x)^5 + 29(-x)^3 - 25(-x) = 4x^5 - 29x^3 + 25x = -f(x)$

→ punktsymmetrisch zum Ursprung

Nullstellen:

$f(x) = x(-4x^4 + 29x^2 - 25) = 0 \rightarrow x_1 = 0$

$-4x^4 + 29x^2 - 25 = 0$

Substitution: $x^2 = z$

$-4z^2 + 29z - 25 = 0$

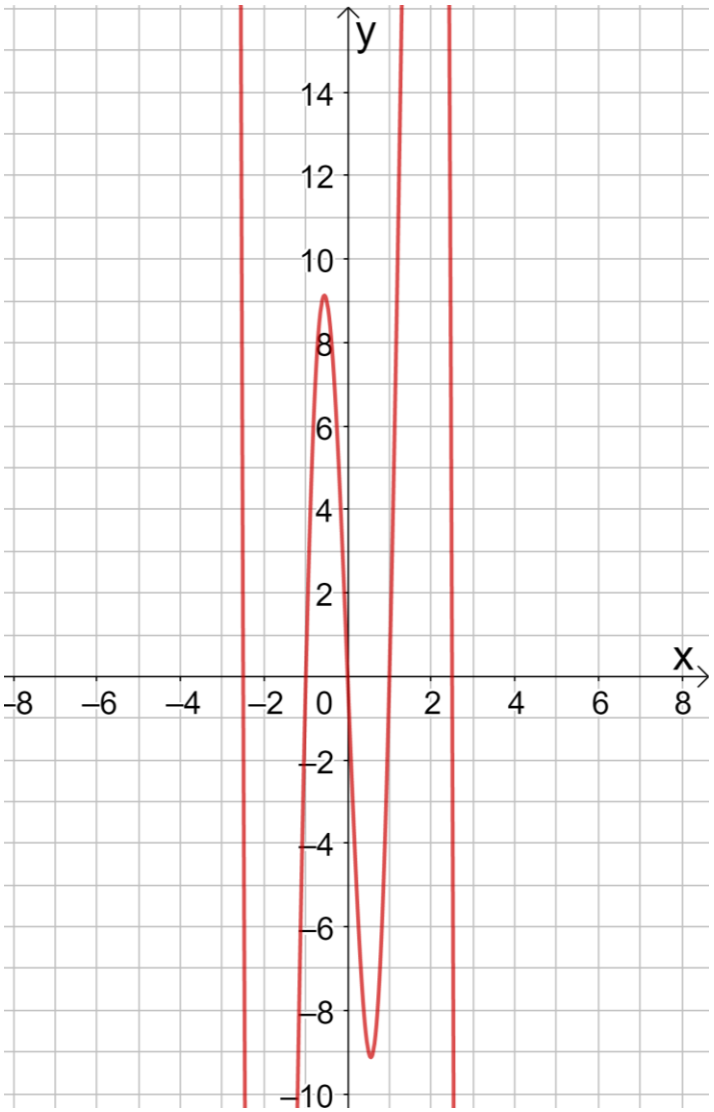
Lösen mit Mitternachtsformel: $z_1 = 1; z_2 = 6{,}25$

Rücksubstitution: $x_2 = 1; x_3 = -1; x_4 = 2{,}5; x_5 = -2{,}5$

$f(0) = 0 \rightarrow$ Schnittpunkt mit der y-Achse $(0|0)$.

Vorzeichentabelle:

x	x < -2,5	-2,5 < x < -1	-1 < x < 0	0 < x < 1	1 < x < 2,5	x > 2,5
f(x)	+	-	+	-	+	-



7. Diskussion einer Bruchfunktion

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

a) Gib die Definitionsmenge der Funktion f an.

b) Untersuche die Funktion f auf Symmetrie.

c) Bestimme $\lim_{x \to \pm\infty} f(x)$.

d) Berechne die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen.

e) Begründe, warum der Graph der Funktion f für $x > 0$ fällt. Gib an, ob der Graph der Funktion f für $x < 0$ steigt oder fällt. Gib die Koordinaten des höchsten Punktes vom Graph von f an.

f) Skizzieren den Graphen der Funktion f und beschreibe seinen Verlauf in Worten.

g) Gib die Gleichung der Bruchfunktion an, deren Graph durch Spiegelung des Graphen von f an der x-Achse entsteht.

a) $D_f = \mathbb{R}$

b) $f(-x) = \frac{1}{1+(-x)^2} = \frac{1}{1+x^2} = f(x)$ → achsensymmetrisch zur y-Achse

c) $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{1+x^2} = 0$.

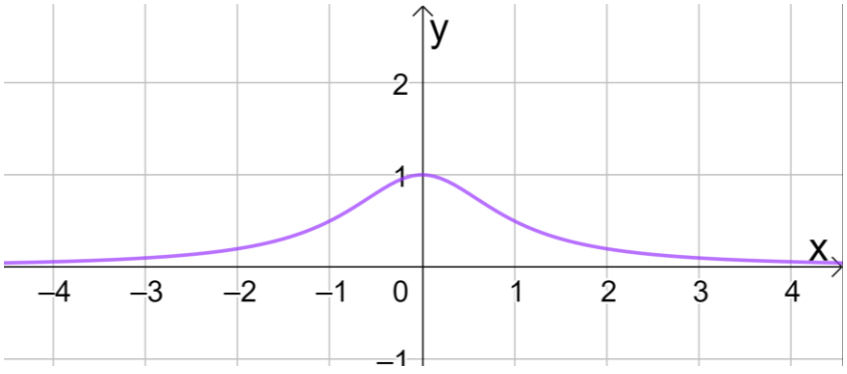
d) $f(0) = 1$ → Schnittpunkt mit der y-Achse $(0|1)$.

Es gibt keine Schnittpunkte mit der x-Achse.

e) Der Graph hat in H(0|1) seinen höchsten Punkt, da bei wachsendem Betrag von x der Nenner $1 + x^2$ immer größer wird und dadurch der Bruch immer kleiner wird. Also steigt dann Graph der Funktion f für x < 0.

f)

Der Graph von f nähert sich für $x \to -\infty$ der x-Achse an, steigt dann bis zum höchsten Punkt H(0|1) an und fällt dann wieder und nähert sich für $x \to \infty$ der x-Achse an. Die x-Achse ist waagrechte Asymptote.



g) $g(x) = -\frac{1}{1+x^2}$